

LBRIS

We know
books

**CĂTĂLIN - PETRU NICOLESCU
MĂDĂLINA YUPARI Z. WILLIAMS**

MATEMATICĂ

clasa a XII-a

- **ALGEBRĂ SUPERIOARĂ**
- **ANALIZĂ MATEMATICĂ**

**SINTEZE DE TEORIE
EXEMPLE REZOLVATE
EXERCITII ȘI PROBLEME**

- **Fixarea cunoștințelor**
- **Aprofundarea cunoștințelor**
- **Performanță**
- **Autoevaluare**
- **Evaluare sumativă**

Ediția a patra revăzută și adăugită

**EDITURA ȘI TIPOGRAFIA ICAR
București**



CUPRINS

ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

E *

R **

Capitolul I. LEGI DE COMPOZIȚIE

1. Legi de compoziție pe o mulțime. Parte stabilă	
Breviar de teorie	3
Probleme propuse	8
2. Proprietăți ale legilor de compoziție interne	
Breviar de teorie	12
Probleme propuse	16
Teste de evaluare	21
	325
	328
	332

Capitolul II. GRUPURI

1. Monoizi. Grupuri	
Breviar de teorie	23
Probleme propuse	27
2. Grupuri finite. Subgrupuri. Ordinul unui grup finit. Ordinul unui element	
Breviar de teorie	32
Probleme propuse	36
3. Morfisme de grupuri. Izomorfisme de grupuri	
Breviar de teorie	41
Probleme propuse	45
Teste de evaluare	50
	332
	337
	340
	344

Capitolul III. INELE ȘI CORPURI

1. Inele	
Breviar de teorie	53
Probleme propuse	59
2. Corpuri	
Breviar de teorie	63
Probleme propuse	67
Teste de evaluare	69
	346
	351
	354

Capitolul IV. POLINOAME

1. Polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ. Operații cu polinoame.	
Teorema împărțirii cu rest	
Breviar de teorie	72
Probleme propuse	79
2. Divizibilitatea polinoamelor. Rădăcini multiple. Descompunerea polinoamelor.	
Cel mai mare divizor comun al unor polinoame.	
Cel mai mic multiplu comun al unor polinoame	
Breviar de teorie	83
Probleme propuse	96
	360
	363

* E - enunțuri

** R - răspunsuri, rezolvări

3. Relațiile lui François Viète. Ecuații algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Ecuații bipătrate. Ecuații reciproce. Ecuații binome. Ecuații trinome.

Sisteme de ecuații neliniare. Separarea rădăcinilor unei ecuații

Breviar de teorie	101	
Probleme propuse	147	367
Teste de evaluare	152	378

ANALIZĂ MATEMATICĂ

Capitolul I. TESTE PREDICTIVE

Testul 1	155	383
Testul 2	156	384
Testul 3	157	386
Testul 4	158	388
Testul 5	159	390
Testul 6	160	392
Testul 7	161	394
Testul 8	162	397
Testul 9	163	400
Testul 10	163	401
Testul 11	165	403
Testul 12	166	405

Capitolul II. PRIMITIVE. INTEGRALA NEDEFINITĂ A UNEI FUNCȚII

1. Primitivele unei funcții pe un interval real dat	
Breviar de teorie	167
A. Tabel cu derivatele unor funcții elementare f	170
B. Tabel cu derivatele unor funcții compuse μ	171
Probleme propuse	185
2. Calculul unor primitive folosind integrarea directă	
A. Tabel cu integrale nedefinite din funcții elementare	188
B. Tabel cu integrale nedefinite din funcții elementare - completare	189
C. Tabel cu integrale nedefinite din funcții compuse	190
Probleme propuse	193

Capitolul III. METODE DE CALCUL ALE PRIMITIVELOR

1. Metoda integrării prin părți	
Breviar de teorie	197
Probleme propuse	203
2. Metode de schimbare de variabilă	
Breviar de teorie	206
Probleme propuse	212
3. Integrarea funcțiilor raționale	
Breviar de teorie	215
Probleme propuse	226

* E – enunțuri

** R – răspunsuri, rezolvări

4. Integrarea funcțiilor trigonometrice		
Breviar de teorie	229	
Probleme propuse	233	424
5. Integrarea funcțiilor exponențiale		
Breviar de teorie	234	
Probleme propuse	238	426
6. Integrarea funcțiilor iraționale		
Breviar de teorie	239	
Probleme propuse	244	426
7. Integrarea funcțiilor binome		
Breviar de teorie	245	
Probleme propuse	247	430
8. Alte procedee pentru determinarea primitivelor	247	
9. Integrale care nu se pot exprima prin funcții elementare		
Breviar de teorie	255	

Capitolul IV. INTEGRALA DEFINITĂ

1. Funcții integrabile Riemann.		
Breviar de teorie	256	
Integrala definită (integrala Riemann)		
Condiții suficiente ca o funcție să fie (sau să nu fie) integrabilă		
Probleme propuse	260	431
2. Formula lui Leibniz-Newton		
Breviar de teorie	263	
Probleme propuse	265	433
3. Proprietăți ale integralei definite		
Breviar de teorie	267	
Proprietatea de liniaritate a integralei		
Proprietatea de aditivitate a integralei		
Proprietatea de conservare a semnelui integralei		
Proprietatea de monotonie a integralei		
Proprietatea de înmulțire a funcțiilor integrabile		
Proprietatea de paritate-imparitate a funcțiilor integrabile		
Teorema de medie pentru funcții continue		
Teorema de medie pentru funcții integrabile		
Teorema de existență a primitivelor unor funcții continue		
Proprietatea de periodicitate a funcțiilor integrabile		
Derivatele unor integrale care au limite de integrare variabile		
Probleme propuse	275	435

Capitolul V. METODE DE CALCUL ALE INTEGRALEI DEFINITE

Breviar de teorie	280	
Formula de integrare prin părți		
Prima metodă de schimbare de variabilă		
A doua metodă de schimbare de variabilă		
Calculul integralei unei funcții pare sau impare		
Probleme propuse	287	439

* E – enunțuri

** R – răspunsuri, rezolvări

Capitolul VI. APLICAȚII ALE INTEGRALEI DEFINITE

E

R

Breviar de teorie	294	
1. Calculul limitelor unor șiruri cu ajutorul integralelor definite utilizând sumele Riemann		
2. Calculul ariilor unor suprafețe plane		
3. Calculul volumelor corpurilor de rotație		
Probleme propuse	305	444

Capitolul VII. TESTE DE EVALUARE

Testul 1	308	446
Testul 2	308	446
Testul 3	309	448
Testul 4	309	449
Testul 5	310	449
Testul 6	310	450
Testul 7	311	451
Testul 8	311	452
Testul 9	312	453
Testul 10	313	454
Testul 11	313	456
Testul 12	314	457
Testul 13	314	458
Testul 14	315	459
Testul 15	315	461
Testul 16	316	462
Testul 17	317	463
Testul 18	317	464
Testul 19	318	465
Testul 20	318	466
Testul 21	319	468
Testul 22	320	469
Testul 23	320	470
Testul 24	321	471
Testul 25	321	472
Testul 26	322	473
Testul 27	322	474
Testul 28	322	474
Testul 29	323	475
Testul 30	323	475
Testul 31	323	476
Testul 32	324	477
Testul 33	324	478

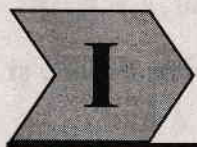
Promotori ai matematicii

479

Bibliografie selectivă

483

ALGEBRĂ SUPERIOARĂ



Legi de compoziție

1. Legi de compoziție pe o mulțime. Parte stabilă

Breviar de teorie

Lege de compoziție

Definiție. Fie M o mulțime nevidă. Se numește *lege de compoziție sau operație algebrică* definită pe M , o aplicație $\varphi : M \times M \rightarrow M$, care asociază fiecărei perechi $(x, y) \in M \times M$, un unic element $\varphi(x, y) \in M$.

Observații:

1. Elementul $\varphi(x, y)$ se numește *compusul* lui x cu y prin legea φ .
2. În general, operația $\varphi(x, y)$ se va desemna printr-un simbol special: $*$, $\circ$, $\top$, $\perp$, $\oplus$, $\odot$ etc. De asemenea, se poate utiliza notația aditivă $(+)$ sau notația multiplicativă $(\cdot)$.

Parte stabilă

Definiție. Fie M o mulțime nevidă și „ $\circ$ ” o lege de compoziție pe M . O submulțime nevidă $H \subseteq M$ se numește *parte stabilă a lui M în raport cu operația „ $\circ$ ”*, dacă pentru orice $x, y \in H$, rezultă că $x \circ y \in H$.

Observații:

1. Numele de „parte stabilă” pentru o submulțime H a lui M în raport cu operația „ $\circ$ ” precizează că dacă $x, y \in H$, atunci și compusul lor $x \circ y$ rămâne în H .
2. Dacă H este o parte stabilă a lui M în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ”, atunci spunem că $(H, \circ)$ este o *lege de compoziție indusă de legea de compoziție de pe M* .

Clase de resturi modulo n ($\mathbb{Z}_n$)

Definiție. Fie un număr $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, spunem că a este congruent cu b modulo n și scriem $a \equiv b \pmod{n}$, dacă $n \mid (a - b)$ sau dacă $\frac{a-b}{n} \in \mathbb{Z}$.

Altfel spus: numărul a este congruent cu numărul b modulo n , dacă și numai dacă dau același rest r , prin împărțire la n :

$$a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow \begin{cases} a = nq_1 + r \\ b = nq_2 + r \end{cases}, \text{ unde } q_1, q_2, r \in \mathbb{Z}, \text{ iar } 0 \leq r < n.$$

• Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $a \in \mathbb{Z}$.

- Restul împărțirii lui a la n se numește *redusul modulo n al numărului a* și se notează $a \pmod{n}$ sau $a(\text{mod } n)$.

- Notăm: $\hat{a} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv a \pmod{n}\}$.

$\hat{a} = \widehat{a \text{ mod } n}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$, unde $\hat{a}$ se numește *clasa lui a modulo n* .

• Fie $n \in \mathbb{N}^*$.

- Mulțimea $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \widehat{n-1}\}$ se numește *mulțimea claselor de resturi modulo n* ,

unde $\hat{0} = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\hat{1} = \{kn+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

$\hat{2} = \{kn+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \dots,$

$\widehat{n-1} = \{kn+(n-1) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

Pentru k un număr fixat în $\mathbb{Z}$, numerele întregi a și $a+nk$, reprezintă aceeași clasă de resturi: $\hat{a} = \widehat{a+nk}$.

- Pe mulțimea $\mathbb{Z}_n$ se definesc următoarele legi de compoziție:

$$,,+": \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, \hat{a} + \hat{b} = \widehat{a \oplus b};$$

$$,,\cdot": \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, \hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \odot b}.$$

Cum pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$, avem $\hat{a} = \hat{b} \Leftrightarrow \widehat{a \text{ mod } n} = \widehat{b \text{ mod } n} \Leftrightarrow a(\text{mod } n) = b(\text{mod } n) \Leftrightarrow n \mid (a-b) \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}$.

Deci $a \oplus b = (a+b) \text{ mod } n$ și $a \odot b = (ab) \text{ mod } n$.

În concluzie: $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a \oplus b} = \widehat{a+b}$ și $\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \odot b} = \widehat{ab}$, $\forall \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_n, n \geq 2$.

• *Suma dintre clasele de resturi $\hat{a}$ și $\hat{b}$ se definește astfel:*

$\hat{a} + \hat{b} = \hat{r}$, unde r reprezintă restul împărțirii sumei $a+b$ la n .

- Dacă $\hat{a} + \hat{b} = \hat{0}$, spunem că $\hat{b}$ este opusa clasei $\hat{a}$ în $\mathbb{Z}_n$ și notăm $\hat{b} = -\hat{a}$.

Se constată că $-\hat{a} = \hat{0} - \hat{a} = \hat{n} - \hat{a} = \widehat{n-a} \Rightarrow -\hat{a} = \widehat{n-a}$.

- Oricare ar fi $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_n$, atunci $\hat{a} + \hat{b} = \hat{b} + \hat{a}$.

• *Scăderea claselor de resturi $\hat{a}$ și $\hat{b}$ se definește astfel:*

$$\hat{a} - \hat{b} = \hat{a} + (-\hat{b}) = \hat{a} + (\hat{0} - \hat{b}) = \hat{a} + (\hat{n} - \hat{b}) = \hat{a} + \widehat{n-b}.$$

• Înmulțirea claselor de resturi $\hat{a}$ și $\hat{b}$ se definește astfel:

$\hat{a} \cdot \hat{b} = \hat{r}_1$, unde $\hat{r}_1$ reprezintă restul împărțirii produsului $a \cdot b$ la n .

- Oricare ar fi $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_n$, atunci $\hat{a} \cdot \hat{b} = \hat{b} \cdot \hat{a}$.

- Dacă $\hat{a} \cdot \hat{b} = \hat{1}$ și $\hat{a} \neq \hat{0}$, spunem că $\hat{b}$ este inversa clasei $\hat{a}$ și notăm $\hat{b} = \hat{a}^{-1}$.

Rezolvarea unei ecuații elementare: $\hat{a} \cdot x = \hat{b}$

Mai putem scrie $x = \hat{a}^{-1} \cdot \hat{b}$, iar pentru a determina inversa clasei $\hat{a}$,

procedăm astfel: fie $\hat{a}^{-1} = \hat{c} \in \mathbb{Z}_n \Leftrightarrow ac \equiv 1(\text{mod } n) \Leftrightarrow \frac{ac-1}{n} \in \mathbb{Z}$ și

determinăm numărul întreg c , ca fiind egal, de exemplu, cu α , adică $\hat{a}^{-1} = \hat{\alpha}$.

În concluzie $x = \hat{a}^{-1} \cdot \hat{b} \Rightarrow x = \hat{\alpha} \cdot \hat{b} \Rightarrow x = \widehat{\alpha \cdot b}$.

Tabla unei legi de compoziție

Dacă „ $\circ$ ” este o lege de compoziție pe M , iar mulțimea M este finită,

$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, atunci legea poate fi redată printr-un tablou, numit *tabla operației „ $\circ$ ”*, astfel:

$\circ$	x_1	x_2		x_j		x_n
x_1	$x_1 \circ x_1$	$x_1 \circ x_2$	...	$x_1 \circ x_j$	...	$x_1 \circ x_n$
x_2	$x_2 \circ x_1$	$x_2 \circ x_2$	...	$x_2 \circ x_j$	...	$x_2 \circ x_n$
...	...	...		...		...
x_i	$x_i \circ x_1$	$x_i \circ x_2$	...	$x_i \circ x_j$	...	$x_i \circ x_n$
...	...	...		...		...
x_n	$x_n \circ x_1$	$x_n \circ x_2$	...	$x_n \circ x_j$	...	$x_n \circ x_n$

În acest tabel, elementul $x_i \circ x_j$ este situat pe linia i și pe coloana j .

Probleme rezolvate

1. Considerăm mulțimea $M = [2, +\infty)$.

a) Să se arate că operația $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$, definește pe M , o lege de compoziție.

b) Să se calculeze numerele $a = 2 \circ 3$ și $b = (-1) \circ 4$.

a) Pentru a demonstra că legea este o operație algebrică, trebuie să arătăm că pentru orice numere $x \geq 2, y \geq 2$, avem $x \circ y \geq 2$.

Scriem echivalent: $x \circ y \geq 2 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 \geq 2 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x(y - 2) - 2(y - 2) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(y - 2) \geq 0$, ultima inegalitate fiind evidentă, deoarece $x \geq 2$ și $y \geq 2$.

b) $a = 2 \circ 3 = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 6 = 2$, deci $a = 2$, iar

$b = (-1) \circ 4 = (-1) \cdot 4 - 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 + 6$, deci $b = -4$.

2. Fie mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ și legea „ $\circ$ ” definită astfel:

$$x \circ y = \begin{cases} xy, & \text{dacă } x \leq 2, y \leq 2 \\ x - 1, & \text{dacă } x > 2 \\ y - x, & \text{dacă } x \leq 2, y > 2 \end{cases}.$$

a) Efectuând tabla operației, să se deducă că operația „ $\circ$ ” determină pe M o lege de compoziție.

b) Să se rezolve ecuațiile: $x \circ 2 = 4$ și $1 \circ x = 2$.

Rezolvare:

a) Din tabla operației, prezentată alăturat, deducem că operația „ $\circ$ ” este algebrică pe M .

b) Din tabla operației deducem că:

$x \circ 2 = 4 \Rightarrow x = 2$, iar din $1 \circ x = 2 \Rightarrow x \in \{2, 3\}$.

$\circ$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	3	4
1	0	1	2	2	3
2	0	2	4	1	2
3	2	2	2	2	2
4	3	3	3	3	3

3. Fie mulțimea $M = [2, 4] \subset \mathbb{R}$ și legea de compoziție $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$.

a) Să se arate că M este parte stabilă față de legea „ $\circ$ ”.

b) Să se rezolve ecuațiile: $x \circ 2 = 3, x \in M$ și apoi $3 \circ x = 3, x \in M$.

Rezolvare:

a) Se observă că $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3$. Ținând cont că pentru $x \in [2, 4], y \in [2, 4]$, avem că $x - 3 \in [-1, 1]$ și $y \in [-1, 1]$, deducem că $(x - 3)(y - 3) \in [-1, 1]$ și în final că $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3 \in [2, 4]$. În concluzie, mulțimea M este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ față de legea de compoziție „ $\circ$ ”.

b) $x \circ 2 = 3 \Rightarrow 2x - 3x - 3 \cdot 2 + 12 = 3 \Rightarrow -x = -3 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow S = \{3\}$.

$3 \circ x = 3 \Rightarrow 3x - 9 - 3x + 12 = 3 \Rightarrow 3 = 3$, deci ecuația are o infinitate de soluții, adică $S = [2, 4]$.

4. Considerăm mulțimea $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ și legile de compoziție „+” și „·”.

- Să se efectueze $\hat{2} + \hat{3}$ și $\hat{2} \cdot \hat{3}$.
- Să se rezolve ecuațiile $x + \hat{4} = \hat{1}$ și $\hat{4}x = \hat{1}$.
- Să se rezolve ecuația: $\hat{2} \cdot x + \hat{4} = \hat{3}$.
- Să se rezolve ecuația $x^2 + x + \hat{3} = \hat{0}$.

Rezolvare:

$$a) \hat{2} + \hat{3} = \widehat{2+3} = \hat{5} = \widehat{1 \cdot 5 + 0} = \hat{1} \cdot \hat{5} + \hat{0} = \hat{1} \cdot \hat{0} + \hat{0} = \widehat{1 \cdot 0} + \hat{0} = \hat{0} + \hat{0} = \widehat{0+0} = \hat{0}.$$

$$\hat{2} \cdot \hat{3} = \widehat{2 \cdot 3} = \hat{6} = \widehat{1 \cdot 5 + 1} = \hat{1} \text{ (deoarece restul împărțirii lui 6 la 5 este 1).}$$

b) Studiind tabla operației $(\mathbb{Z}_5, +)$, deducem că soluția ecuației $x + \hat{4} = \hat{1}$ este $x = \hat{2}$. Studiind apoi tabla operației $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$, deducem că soluția ecuației $\hat{4}x = \hat{1}$ este $x = \hat{4}$.

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$

·	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

$$c) \hat{2}x + \hat{4} = \hat{3} \Rightarrow \hat{2}x = \hat{3} - \hat{4} = \widehat{3-4} = \widehat{-1} = \widehat{0-1} = \widehat{5-1} = \hat{4} \Rightarrow \hat{2}x = \hat{4} \Rightarrow x = \hat{2}.$$

Altă metodă: $\hat{2}x = \hat{4} \Rightarrow x = \hat{2}^{-1} \cdot \hat{4}$. Calculăm inversa clasei $\hat{2}$ în $\mathbb{Z}_5$: fie

$$\hat{2}^{-1} = \hat{a}, \hat{a} \in \mathbb{Z}_5 \Leftrightarrow 2a \equiv 1 \pmod{5} \Leftrightarrow \frac{2a-1}{5} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a \equiv 3 \pmod{5}. \text{ Astfel } \hat{2}^{-1} = \hat{3}.$$

$$\text{Cum } x = \hat{2}^{-1} \cdot \hat{4}, \text{ atunci } x = \hat{3} \cdot \hat{4} = \widehat{3 \cdot 4} = \widehat{12} = \widehat{2 \cdot 5 + 2} = \widehat{2 \cdot 5} + \hat{2} = \hat{2} \cdot \hat{5} + \hat{2} = \hat{2} \cdot \hat{0} + \hat{2} = \hat{0} + \hat{2} = \hat{2}. \text{ În concluzie, ecuația } \hat{2}x = \hat{4} \text{ are soluția } x = \hat{2}.$$

d)

x	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
x^2	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$
$x^2 + x + \hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{5}$	$\hat{9}$	$\widehat{10}$	$\hat{8}$
$x^2 + x + \hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$

În concluzie, ecuația are soluțiile $\{\hat{1}, \hat{3}\}$.

1. Efectuând tabla operației, să se arate că operațiile specificate reprezintă legi de compoziție pe mulțimea $M = \{1, 2, 4, 8, 16\}$.

- $x \circ y = \min(x, y)$;
- $x \circ y = \text{c.m.m.d.c.}(x, y)$;
- $x \circ y = \text{c.m.m.m.c.}(x, y)$.

2. Efectuând tabla operației, să se arate că operațiile specificate reprezintă legi de compoziție pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, în următoarele cazuri:

- $x \circ y = \max(x, y)$;
- $x \circ y = |x - y|$;
- $x \circ y = x$.

3. Pe mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se consideră legea de compoziție „ $\circ$ ” a cărei tablă este reprezentată alăturat.

a) Să se determine următoarele elemente:

$$a = 1 \circ 3, b = 3 \circ 5; c = 4 \circ 2; d = 5 \circ 4.$$

b) Să se rezolve următoarele ecuații:

- $x \circ 3 = 1$;
- $2 \circ x = 4$;
- $x \circ 5 = 3$;
- $4 \circ x = 2$.

c) Să se rezolve sistemul de ecuații:
$$\begin{cases} 3 \circ x = 3 \\ x \circ y = 4 \end{cases}$$

$\circ$	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	1
2	2	1	5	4	3
3	3	4	3	5	2
4	1	2	1	2	3
5	5	5	2	3	4

4. Pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3\}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = |y - x|$.

- Să se alcătuiască tabla legii de compoziție.
- Să se rezolve ecuațiile: $x \circ 3 = 0$ și $2 \circ x = 1$.

c) Să se rezolve sistemul de ecuații:
$$\begin{cases} x \circ y = 0 \\ y \circ 1 = 2 \end{cases}$$

5. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc următoarele legi de compoziție:

$$x \top y = x + y + 1 \text{ și } x \perp y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} - 1,$$

- Să se calculeze $8 \top 27$ și $8 \perp 27$.
- Să se rezolve ecuația: $x \top 1 = x \perp 27$.

c) Să se rezolve sistemul de ecuații:
$$\begin{cases} x \top y = 65 \\ x \perp y = 3 \end{cases}$$

6. Să se arate că în fiecare dintre următoarele cazuri, mulțimea M este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{R}$, în raport cu legea de compoziție specificată:

- $M = \mathbb{Z}$, $x \circ y = x + y - 3$;

b) $M = \mathbb{N}, x \circ y = |x - y|;$

c) $M = [-5, +\infty), x \circ y = xy + 5x + 5y + 20;$

d) $M = (-3, +\infty), x \circ y = xy + 3x + 3y + 6;$

e) $M = (1, +\infty), x \circ y = xy - x - y + 2;$

f) $M = (2, +\infty), x \circ y = xy - 2x - 2y + 6.$

7. Să se arate că în fiecare dintre cazurile următoare, mulțimea M este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{R}$, în raport cu legea de compoziție specificată:

a) $M = (-1, 1), x \circ y = \frac{x+y}{1+xy};$

b) $M = (0, 1), x \circ y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1};$

c) $M = (0, 1) \cup (1, +\infty), x \circ y = x^{2 \ln y};$

d) $M = (1, 2) \cup (2, +\infty), x \circ y = (x-1)^{\frac{1}{2} \ln(y-1)};$

e) $M = (2, +\infty), x \circ y = \sqrt{x^2 y^2 + x^2 + y^2};$

f) $M = (\sqrt{2}, +\infty), x \circ y = \sqrt{x^2 y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 6}.$

8. Să se arate că în fiecare dintre următoarele cazuri, mulțimea M este parte stabilă a mulțimii $M_2(\mathbb{R})$, în raport cu legea de compoziție specificată:

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{N} \right\},$ adunarea matricelor;

b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 2x & y \\ 3y & 4x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{N} \right\},$ adunarea matricelor;

c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\},$ înmulțirea matricelor;

d) $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \middle| x, y, z, t \in \mathbb{R} \text{ și } \det A \neq 0 \right\},$ înmulțirea matricelor.

9. Să se arate că în fiecare dintre următoarele cazuri, mulțimea M este parte stabilă a mulțimii $M_3(\mathbb{R})$, în raport cu operația de înmulțire a matricelor: